

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE - CLASA A XII A

1.

Observăm că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$. În continuare, axiomele grupului se verifică ușor; elementul neutru va fi $A_0 = I_3$, iar simetrica lui A_x este A_{-x} . Izomorfismul cerut este dat de funcția

$f: \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = A_x$ 7p

2.

Avem că $a_n = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{\ln n}^{\ln(n+1)} = n + \frac{1}{2}$ 5p

Astfel, (a_n) este progresie aritmetică având $a_1 = \frac{3}{2}, r = 1$ 2p

3.

a) $I_1 = \int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg x^2 \Big|_1^2 = \frac{\arctg 4}{2} - \frac{\pi}{8}$ 2p

$I_3 = \int_1^2 \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{(1+x^4)'}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \ln(1+x^4) \Big|_1^2 = \frac{\ln 17}{4}$ 2p

b) $I_0 + I_2 = \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_1^2 \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)'}{x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx = \int_1^2 \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)'}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \Big|_1^2$,

iar $I_2 - I_0 = \int_1^2 \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)'}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \Big|_1^2$ 3p

Adunând și scăzând cele două relații, se determină I_0 și I_2

4.

a) Verificări 2p

b) Proprietățile grupale (mai puțin asociativitatea compunerii, care este însă asigurată) se pot citi în tabla operației, care se completează imediat. 3p

Cum orice element diferit de cel neutru din grupul nostru este de ordin 2, acest grup nu poate fi izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$ 2p